Opción A

Ejercicio n° 1 de la opción A del modelo 5 de 2004

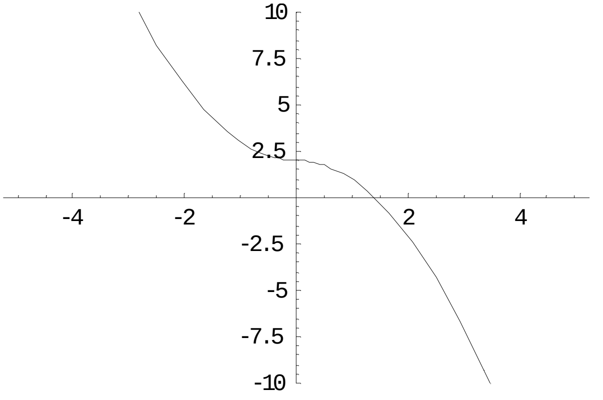
Ejercicio 1. Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = 2 - x\,|x|$.
(a) [0'75 puntos] Esboza la gráfica de f.
(b) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f en x = 0.
(c) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

Solución

(a)

$$f(x) = 2 - x\,|x| = \begin{cases} 2-x^2 & si \quad x \ge 0 \\ 2+x^2 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

La gráfica de $+x^2$ es conocida ((parábola de vértice (0,0), y ramas hacia arriba))
La gráfica de $-x^2$ es igual que la de x^2 pero simétrica respecto al eje OX ((abscisas))
La gráfica de $2 - x^2$ es igual que la de $-x^2$ pero desplazada dos unidades en ordenadas OY, hacia arriba.
La gráfica de $2 + x^2$ es igual que la de $+x^2$ pero desplazada dos unidades en ordenadas OY, hacia arriba.
La gráfica pedida es



(b)

$$f(x) = 2 - x\,|x| = \begin{cases} 2-x^2 & si \quad x \ge 0 \\ 2+x^2 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si \quad x > 0 \\ 2x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Existe $f'(0)$ si $f'(0^+) = f'(0^-)$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f'(x) = \lim_{x\to 0} (-2x) = 0$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f'(x) = \lim_{x\to 0} (+2x) = 0$

Como $f'(0^+) = f'(0^-) = 0$, existe $f'(0) = 0$, por tanto $f'(x) = \begin{cases} -2x & si \quad x \ge 0 \\ 2x & si \quad x < 0 \end{cases}$

(c)
La recta tangente en x = 2 es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$
$f(2) = 2 - (2)^2 = -2$
$f'(2) = -2(2) = -4$
Por tanto la recta tangente en x = 2 es $y + 2 = (-4)(x - 2)$

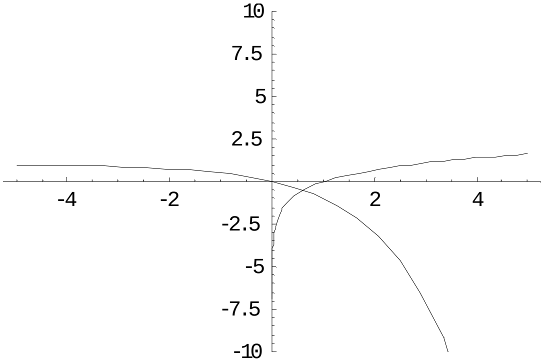
Ejercicio n° 2 de la opción A del modelo 5 de 2004

[2'5 puntos] Considera las funciones $f : (0,+\infty) \to \Re$ y $g : \Re \to \Re$ definidas, respectivamente, por
$f(x) = Ln(x)$ y $g(x) = 1 - 2^x$, siendo Ln x el logaritmo neperiano de x. Calcula el área del recinto limitado por las rectas x =1 y x =2 y las gráficas de f y g.

Solución

La gráfica de Ln(x) es conocida (su dominio es $(0^+, +\infty)$)
La gráfica de 2^x es conocida ((exponencial parecida a e^x))

La gráfica de - 2^x es igual que la de 2^x pero simétrica respecto al eje OX
La gráfica de 1 - 2^x es igual que la de - 2^x pero desplazada dos unidades hacia arriba en el eje OY.
Las recta verticales x = 1 y x = 2 son conocidas
Aunque no lo piden las gráficas son



Vemos que el punto de de corte de Ln(x) con 1 – 2^x, está antes de x = 1 ((se podría aplicar el teorema de Bolzano { si una función g(x) es continua en el cerrado [a,b] y cambia de signo en los extremos del intervalo entonces existe un punto c $\in$ (a,b), tal que g(c) = 0. Se podría probar a = 0'1 y b = 0'9} a la función g(x) = Ln(x) – 1 + 2^x, pero no entra en el temario.

El área pedida es $\int_1^2 \left(Ln(x)-(1-2^x\right)$ dx = [(xLn(x) – x – x + 2^x/(Ln(2) $]^2_1$ =
= [((2Ln(2) – 2 – 2 + 2^2/(Ln(2)) - ((1Ln(1) – 1 – 1 + 2^1/(Ln(2))] =
= 2Ln(2) – 2 + 4/(Ln(2) - 2/(Ln(2) $\cong$ 2'27 u^2

Ejercicio n° 3 de la opción A del modelo 5 de 2004

[2'5 puntos] Considera el sistema de ecuaciones

$$x + 3y + z = 0$$
$$2x - 13y + 2z = 0$$
$$(a + 2)x - 12y + 12z = 0$$

Determina el valor a para que tenga soluciones distintas de la solución trivial y resuélvelo para dicho valor de a.

Solución

Para que el sistema homogéneo

$$x + 3y + z = 0$$
$$2x - 13y + 2z = 0$$
$$(a + 2)x - 12y + 12z = 0$$

tenga soluciones distinta de la trivial (0,0,0), el determinante de la matriz de los coeficientes ha de ser cero, siendo A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -13 & 2 \\ a+2 & -12 & 12 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes, pero |A| = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -13 & 2 \\ a+2 & -12 & 12 \end{vmatrix}$ = 190 – 19a = 0. de donde a = 190/19 = 10.

Si a = 10, |A| = 0, y rango (A) = 2, con lo cual tenemos sólo dos ecuaciones y dos incógnitas principales.
Tomamos las dos primeras.
x + 3y + z = 0
2x − 13y + 2z = 0
Hacemos z = b, con b $\in \Re$ y tenemos
x + 3y = - b
2x − 13y = -2b
Resolviéndolo obtenemos x = - b e y = 0, con lo cual la solución del sist4ma es (x, y, z) = (-b,0,b) con b $\in \Re$.

Ejercicio n° 4 de la opción A del modelo 5 de 2004

Considera el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 7$ y y la recta r $\equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$

(a) [1 punto] Halla la ecuación de un plano perpendicular a π y que contenga a la recta r.
(b) [1'5 puntos] ¿Hay algún plano paralelo a π que contenga a la recta r? En caso afirmativo determina sus

ecuaciones.

Solución

(a)

Para calcular la ecuación de un plano perpendicular a "π" y que contenga a la recta "r", ponemos la recta "r" como intersección de dos planos y formamos el haz de planos que determina "r". Después le imponemos la condición de que dicho haz de planos sea perpendicular al plano "π" ((producto escalar de los vectores normales igual a cero)). De esta forma determinaremos el valor del parámetro y entrando en el haz de planos tendremos el plano pedido.

recta r $\equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$, en continua (x – 1) = (y – 1) = (z – 1)/3. Igualando dos a dos tendremos la recta como intersección de dos planos

(x – 1) = (y – 1), de donde x – y = 0

(x – 1) = (z – 1)/3, de donde 3x – z – 2 = 0

El haz de planos generado por "r" es (x – y) + λ(3x – z – 2)= 0, operando tenemos:

(1 + 3λ)x – y – λz – 2λ = 0, de donde su vector normal es $\mathbf{n_1}$ = (1 + 3λ, -1, -λ)

El vector normal del plano π ≡ 2x + y − z + 7 es **n** = (2,1,-1)

Producto escalar cero

$\mathbf{n_1} \bullet \mathbf{n}$ = 0 = (1 + 3λ, -1, -λ)•(2,1,-1) = 2 + 6λ - 1 + λ = 7λ + 1 = 0, de donde λ = -1/7, y el plano pedido es:

(x – y) + (-1/7)(3x – z – 2)= 0, operando tenemos 4x – 7y + z + 2 = 0

(b)

Para un plano paralelo al plano "π" y que contenga a la recta "r" , hacemos el mismo proceso del apartado (a) y sólo tendríamos que ver si los vectores normales $\mathbf{n_1}$ = (1 + 3λ, -1, -λ) y **n** = (2,1,-1) son proporcionales, es decir (1 + 3λ)/2 = -1/1 = -λ/-1.

Igualando miembro a miembro tenemos

Por un lado (1 + 3λ)/2 = -1/1, de donde 1 + 3λ = - 2, por tanto λ = - 1

Por otro lado -1/1 = -λ/-1, de donde λ = - 1. Como ha salido el mismo λ = - 1, si hay un plano que sea paralelo al plano "π" y que contenga a la recta "r" que es:

(x – y) + (-1)(3x – z – 2)= 0, operando tenemos -2x – y + z + 2 = 0

Opción B

Ejercicio n° 1 de la opción B del modelo 5 de 2004

[2'5 puntos] Se sabe que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)$ es finito. Determina el valor de a y calcula el límite.

Solución

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x - a(e^x - 1)}{(e^x-1)2x}\right)$ = 0/0

Le aplicamos la regla de L'Hôpital ((si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$)) con lo cual tenemos

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x - a(e^x - 1)}{(e^x-1)2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2 - a(e^x)}{(e^x)2x+(e^x-1)2}\right)$ = (2 – a)/0. Como me dicen que el límite existe y es finito el numerado ha de ser cero para poder seguir aplicándole la la regla de L'Hôpital, es decir 2 – a = 0, de donde a = 2.

Volviéndole a aplicar la regla de L'Hôpital, con a = 2, tenemos

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2(e^x)}{(e^x)2x+(e^x-1)2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2(e^x)}{(e^x)2x+(e^x)2+(e^x)2}\right)$ = (-2)/(0 + 2+ 2) = (-2)/(4) = -1/2

Ejercicio n° 2 de la opción B del modelo 5 de 2004

[2'5 puntos] Determina b sabiendo que b > 0 y que el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=\left(\frac{1}{3}x-b\right)^2$ y los ejes coordenados es igual a 8.

Solución

La parábola f(x) = ((1/3)x – b) ^{2} tiene las ramas hacia arriba, el vértice en la abscisa f '(x) = 0 = 2((1/3)x – b), de donde x = 3b. El vértice es (x,y) = (3b, 0). Por tanto al ser b > 0 la parábola está por encima del eje OX.
Por corte con los ejes:
Con OY, hacemos x = 0, de donde y = b ^{2}
Con OX, hacemos f(x) = 0, de donde x = 3b
Como b > 0, el área es 8 y es entre la parte positiva de los ejes coordenados, tenemos que el área es:

Área = 8 = $\int_0^{3b}\left(\frac{1}{3}x-b\right)^2 dx$ = [(((1/3)x – b) ^{3} /3)3]$_0^{3b}$ =

= [(((1/3)x – b) ^{3}]$_0^{3b}$ = (0) – (– b) ^{3} = b ^{3} = 8 , de donde b = 2

Ejercicio n° 3 de la opción B del modelo 5 de 2004

Ejercicio 3. Se sabe que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

(a) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

(b) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(c) [1 punto] $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Solución

(a)

$$\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = (3)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = (3)(5)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =(3)(5)(-2) = -30$$

Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

(b)

$$\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (3)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (3)(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (3)(-1)(-2) = 6$$

Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.
Si se intercambian entre si dos filas (columnas) de un determinante, el determinante cambia de signo
(c)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-2) + (-1)(0) = -2$$

Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el premier y segundo sumando respectivamente
Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.
Si un determinante tiene dos filas (columnas) iguales o proporcionales dicho determinante es nulo (0)

Ejercicio n° 4 de la opción B del modelo 5 de 2004

Las rectas r ≡ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+2y+z-4=0 \end{cases}$ y s ≡ $\begin{cases} x+y-6=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$ contienen dos lados de un cuadrado.

(a) [1’25 puntos] Calcula el área del cuadrado.
(b) [1’25 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

Solución

(a)
De cada recta r ≡ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+2y+z-4=0 \end{cases}$ y s ≡ $\begin{cases} x+y-6=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$ tomamos un punto y un vector director:

De la recta r ≡ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+2y+z-4=0 \end{cases}$ tomamos el punto A y el vector director **u**

Vector **u** = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(1) – **j**(1) + **k**(0) = (1,-1,0)

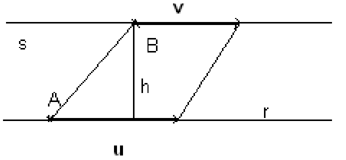
Para el punto A hacemos y = 0, de donde x = 2 y z =0, luego A(x,y,z)= A(2,0,0)

De la recta s ≡ $\begin{cases} x+y-6=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$ tomamos el punto B y el vector director **v**

Vector **v** = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = **i**(-1) – **j**(-1) + **k**(0) = (-1,1,0)

Para el punto B hacemos y = 0, de donde x = 6 y z =0, luego B(x,y,z)= B(6,0,0)

Como las rectas son paralelas para determinar el área del cuadrado calculamos la distancia de una recta a la otra recta, que será el lado del cuadrado, y el área es el lado al cuadrado



Lado del cuadrado = h = d(B, r)
Área paralelogramo = || **AB**x**u** || = ((módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **u**)) = (base)(altura) = ||**u**||·d(r,s), de donde
d(r,s) = (|| **AB**x**u** ||) / (|| **u** ||)
AB = (4,0,0)

$$\mathbf{AB}\text{x}\mathbf{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(-4) = (0,0,-4)$$

|| **AB**x**u** || = √(0+0+16) = 4

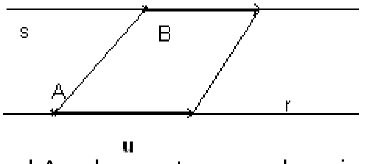
|| **u** || = √(1+1+0) = √(2)

Luego lado del cuadrado = h = d(B, r) = d(r ,s) = (|| **AB**x**u** ||) / (|| **u** ||) = 4/√(2)

Área del cuadrado = h·h = (4/√(2)) ·(4/√(2)) = 16/2 = 8 u^2

(b)

Para hallar la ecuación del plano que contiene al cuadrado, es hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas “r” y “s”.



Un plano está determinado por un punto, el A y dos vectores coplanarios el **u** y el **AB**.

La ecuación del plano es det(**x** – **a**, **u**, **AB**) = 0 = $\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = (x -2)(0) – (y)(0) + (z)(-4) = -4z = 0, es decir el plano que contiene al cuadrado es z = 0.